

Reykjavík, 12. maí, 2023

Til: Fjármála- og efnahagsráðuneytis
b/t Jóns Gunnars Vilhelmssonar og
Katrínar Oddsdóttur

Frá: Analytica ehf.
Yngva Harðarsyni

Efni: Ávöxtunarforsendur blandaðra eignasafna að teknu tilliti til áhættu

Minnisblað þetta er ritað að beiðni fjármála- og efnahagsráðuneytis og varðar þær forsendur sem telja má að raunhæft sé að gera um langtímaávöxtun blandaðra eignasafna að teknu tilliti til áhættu. Tilefnið er vinna í tengslum úrvinnslu eigna og skulda ÍL-sjóðs og mun minnisblaðið hugsað sem stuðningur við forsendugerð í samningum við eigendur skuldabréfa ÍL-sjóðs.¹

Minnisblað þetta gerir grein fyrir mati á væntri ávöxtun og áhættu blandaðra eignasafna sem fjármála- og efnahagsráðuneytið hefur viðrað við fjárfesta að nota í skiptum fyrir skuldabréf ÍL-sjóðs. Minnisblaðið byggir á almennum sjónarmiðum í þessum efnum varðandi fjárfestingarkosti og hvað hlutabréf varðar sérstaklega þá er miðað við að um sé að ræða ígildi dreifðs safns hlutabréfa. Tilgangur minnisblaðsins er ekki að taka afstöðu til lögfræðilegra álitaefna.

Viðfangsefni Analytica er þannig að meta ávöxtunarmöguleika á „dæmigerðu“ umbreyttu eignasafni ÍL-sjóðs og meta áhættu þess auk samspils þessara þátta. Í þessu samhengi er gert ráð fyrir að ríkissjóður taki yfir ákveðnar núverandi eignir ÍL-sjóðs og láti í té aðrar eignir. Hið dæmigerða umbreytta eignasafn gæti samanstaðið af:

1. Markaðsverðbréfum í eigu ÍL-sjóðs en þau samstanda m.a. af sértryggðum skuldabréfum bankanna, ríkisbréfum og skuldabréfum sveitarfélaga.
2. Nýjum markaðsskuldabréfum útgefnum af ríkissjóði. Mögulegt er að ríkissjóður láti af hendi lengri bréf þar sem líftími yrði sambærilegur og á íbúðabréfum eða lengri til að meðallíftími afhentra skuldabréfa endurspegli meðallíftíma skulda.
3. Gjaldeyri og hlutabréf í eigu ríkisins þar sem líftími er óviss. Það er meðal forsendna greiningarinnar að gjaldeyri væri ráðstafað til kaupa á erlendum hlutabréfum.

Helstu niðurstöður

- Fyrir liggur að fjárfestar sem eiga skuldabréf ÍL-sjóðs munu í vaxandi mæli þurfa að endurfjárfesta greiðslum af skuldabréfum ÍL-sjóðs og þá á grunni markaðstækifæra sem ríkja þegar slíkar greiðslur berast. Komi til uppgreiðslu ÍL-sjóðs á skuldabréfum í tengslum við möguleg slit sjóðsins þá flýtir sú uppgreiðsla slíkri endurfjárfestingu.
- Greiningin bendir til að unnt ætti að vera að setja saman eignasöfn sem bera svipaða eða meiri vænta ávöxtun en nafnvextir skuldabréfa ÍL-sjóðs bera en þar sem meiri óvissa ríkir um ávöxtun.
- Vænt langtímaávöxtun af blönduðu eignasafni skuldabréfa og innlendra og erlendra hlutabréfa gæti verið á bilinu 4,1-4,7% með 0,8-1,1% árlegu staðalfrávikum væntrar langtímaávöxt-

¹ Greiningin felur ekki í sér meðmæli með umræddum samningum hvorki til ríkissjóðs né fjárfesta heldur er hér um að ræða athugun varðandi möguleg áhrif. Greiningin felur heldur ekki í sér meðmæli með áframhaldandi rekstri ÍL-sjóðs.

unar m.v. gefnar forsendur. Er hér miðað við niðurstöður fjögurra dæmigerðra eignasafna sem boðin væru í skiptum fyrir skuldabréf ÍL-sjóðs. Til samanburðar þá má nefna að þessi ávöxtun er yfir ávöxtunarkröfu Íbúðabréfa sem metin er miðað við nafnvirði bréfanna (par) sem er tæplega 3,8%. Miðað við forsenduna um fullar efnidir þá væri slík ávöxtun áhættulaus miðað við að bréfunum sé haldið til lokagjalddaga.²

- Vegna ósamhverfrar dreifingar ávöxtunar og meiri líkinda á stórum frávikum ávöxtunar frá langtímaeðaltölum þá er staðalfrávik ekki fullnægjandi mælikvarði á áhættu. Best er að styðjast við metnar tíðnidreifingar og er það sú nálgun sem notuð er hér á grunni svokallaðra bootstrap hermireikninga. Framkvæmdar eru 1000 hermanir en í því felst að reiknaðar eru 1000 sviðsmyndir sem mynda grundvöll líkindareikningsins.
- Þau dæmigerðu eignasöfn sem gefa hærri vænta langtímaávöxtun gætu verið ákjósanlegri frá sjónarhóli fjárfesta þrátt fyrir hærri staðalfrávik ávöxtunar þar sem greiningin gefur til kynna meiri líkur á að vænt langtímaávöxtun verði yfir 3,5% í þeim dæmum.
- Greiningin endurspeglar nálganir en ekki vissu um réttar forsendur eða besta líkan. Öll líkón fela í sér að gerðar eru einfaldanir. Því ber að líta á niðurstöður sem rökstuddar vísbendingar en ekki ótvíræðan sannleik.

Greiningin

Sú greining sem hér er kynnt byggir á útvíkkun sk. CAPM-líkans³. CAPM-líkanið felur í sér nálgun á því hvaða ávöxtunarkröfu eðlilegt sé að gera til eigna. Útvíkkunin felst m.a. í hermireikningum þar sem gerð er sú forsenda að bæði ávöxtun og markaðsflökt (áhætta) sé breytilegt frá einum tíma til annars. Með markaðsflökti (e. volatility) er átt við sveiflur í ávöxtun.

CAPM-líkanið tengir saman vænta ávöxtun eignar (ávöxtunarkröfu), áhættulausa vexti, markaðs-áhættuálag og kerfisbundna áhættu. Um er að ræða einfalt líkan sem byggir á ströngum forsendum. Líkanið er algengt við verðmat þar sem rökrétt samhengi er á milli ávöxtunarkröfu og verðmats sem byggir á framtíðarsjóðstreymi. Þannig má t.d. ákvarða veginn fjármagnskostnað (WACC) á grunni líkansins. Í núverandi samhengi þá er líkanið notað til að leiða fram vænta langtímaávöxtun eignaflokka og samhengi hennar við áhættu og áhættulausa ávöxtun. Samkvæmt líkaninu þá er vænt ávöxtun eignar jafngild áhættulausri ávöxtun að viðbættu álagi sem ræðst af kerfisbundinni áhættu og markaðsáhættuálagi. Nánar er fjallað um líkanið í næsta kafla.

Greindar eru niðurstöður fyrir fjögur dæmigerð eignasöfn og eru útreikningar framkvæmdir á raunvirði. Dæmunum hefur verið stillt upp í samvinnu við fjármála- og efnahagsráðuneytið. Útreikningar eru framkvæmdir fyrir árabilið 2023-2044.

Í töflu 1 má sjá fjögur dæmi um eignasöfn, I-IV, þar sem vægi eignaflokka er miðað við stöðuna eins og hún væri við skipti en til einföldunar greiningarinnar er miðað við sl. áramót. Vægi eignaflokka þessa fjögurra eignasafna breytist yfir tíma vegna endurgreiðsluferils skuldabréfa.

² Þ.e. árlegt staðalfrávik langtímaávöxtunar 0%.

³ CAPM stendur fyrir Capital Asset Pricing Model. Höfundar líkansins fengu Nóbelsverðlaun í hagfræði árið 1990, sjá <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/sharpe-lecture.pdf>. Líkanið er kennslubókarefni í fjármálum á háskólastigi en í því sambandi má t.d. benda á íslenska bók próf. Gylfa Magnússonar, *Eignastýring* (2002).

Tafla 1. Dæmi um eignasöfn til skipta fyrir skuldabréf ÍL-sjóðs

Dæmi	Vænt ávx.	I	II	III	IV
Ríkisskuldabréf	1.96%	65.3%	58.3%	41.7%	65.3%
Skuldabréf HS, Briet o.fl.	2.50%	0.0%	0.0%	16.6%	0.0%
Önnur markaðsskuldabréf	2.50%	13.7%	13.7%	13.7%	13.7%
Innlend hlutabréf	7.72%	10.5%	14.0%	14.0%	10.5%
Erlend hlutabréf	7.68%	10.5%	14.0%	14.0%	10.5%
Samtals		100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Í útreikningum er gerð sú forsenda að öll ávöxtun hlutabréfa sé greidd út á því ári sem hún kemur til hvort sem hún er jákvæð eða neikvæð.

Mismunur á dæmum I og IV felst í mismuni á væntu sjóðstreymi en í dæmi IV er gerð sú forsenda að þróun eignastöðu líki eftir þróun eftirstöðva skuldabréfa ÍL-sjóðs. Í þessu felst að í dæmi IV er gert ráð fyrir að afhent hlutabréf séu seld á seinni hluta fjárfestingartímans. Vegna þess að vænt eignastaða er breytileg yfir tíma og mismunandi á milli dæma þá er ekki unnt að vega saman vænta ávöxtun eignaflokka með vægi í upphafi. Þess í stað eru hermireikningar gerðir á grundvelli innri vaxta (e. Internal Rate of Return) vænts sjóðstreymis af eignasöfnum. Lýsandi dæmi um þetta er t.d. að í dæmum II og III vega hlutabréf 100% í lok fjárfestingartímans og vænt ávöxtun þeirra er mun hærri en vænt ávöxtun ríkisskuldabréfa. Til samanburðar þá má nefna að í tilviki skuldabréfa ÍL-sjóðs þá eru eftirstöðvar þeirra 0 í árslok 2044.

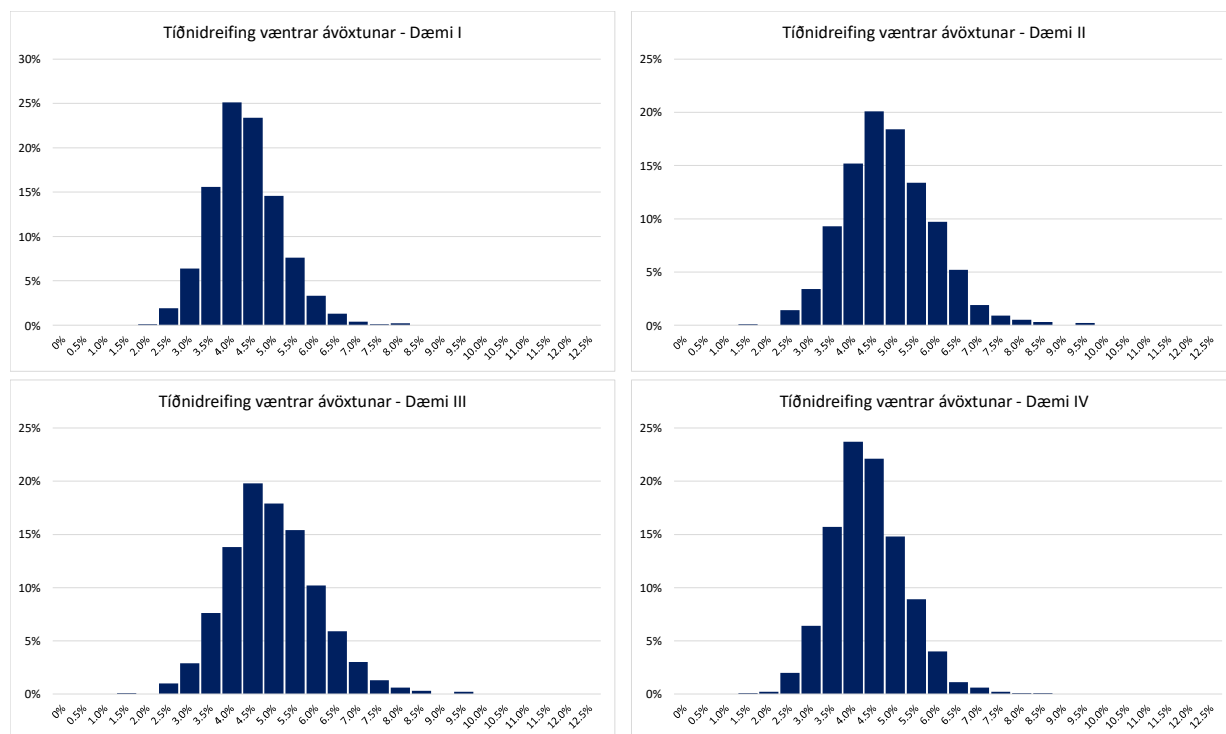
Tafla 2. Vænt langtímaávöxtun dæmigerðra eignasafna sbr. töflu 1

Dæmi	I	II	III	IV
Vænt langtímaávöxtun	4.1%	4.6%	4.7%	4.1%
Vænt staðalfrávik langt. ávx	0.8%	1.0%	1.1%	0.9%
Skekking (skewness)	0.41	0.35	0.35	0.39
Ferilris (kurtosis)	3.81	3.66	3.64	3.69
Eignastaða í lok/upphafi	21%	28%	28%	0%
Vægi hlutabréfa í lok	100%	100%	100%	0%

Niðurstöður hermireikninga varðandi vænta langtímaávöxtun hinna dæmigerðu eignasafna er sýnd í töflu 2 og er hún á bilinu 4,1-4,7%. Áhætta eins og hún er mæld með árlegu staðalfráviki væntrar langtímaávöxtunar er einnig sýnd og svo tveir mælikvarðar sem lýsa lögun metinna tíðnidreifinga, þ.e. skekking (e. skewness) og ferilris (e. kurtosis). Hugtakið tíðnidreifing er notað um mat á líkindadreifingu sem er fræðilegt hugtak. Skekking er mælikvarði á það hvort dreifing er skökk til hægri eða vinstri en normaldreifing er samhverf og hefur núll í skekkingu. Ferilris er mælikvarði á það hversu víða hala dreifingin hefur og mikið ferilris gefur til kynna víða hala. Í víðum hölum felst að meiri líkur eru á öfgagildum en samkvæmt normaldreifingu. Metnar tíðnidreifingar ávöxtunar á fjármálamarkaði eru yfirleitt bæði skakkar og með meira ferilris en normaldreifing. Til samanburðar má nefna að Normaldreifing hefur ferilrisið 3.

Á mynd 1 má sjá samanburð á tíðnidreifingum fyrir þau fjögur dæmigerðu eignasöfn sem um ræðir. Lóðrétti ásin sýnir hlutfallslega tíðnidreifingu en sá lárétti vænta langtímaávöxtun á hálfis prósentis bilum. Tölur á lárétta ásnúnum eru við efri mörk hvers bils, t.d. stendur 4,5% fyrir bilið 4,0-4,5%. Sjá má að dreifingarnar eru allar ósamhverfar og skekktar til hægri. Það er hins vegar ekki eins augljóst að þær hafi víða hala enda eru svo hlutfallslega fáir atburðir sem lenda í ystu jöðrum dreifinganna þótt þeir séu fleiri en ef um normaldreifingu væri að ræða.

Mynd 1. Tíðnidreifingar væntrar langtímaávöxtunar í dæmum I-IV



Mynd 1 endurspeglar að dæmi I er áhættuminnst en það má sjá á því að toppur tíðnidreifingarinnar er í 25% og dreifingin er þrengri í kringum toppinn en hinar dreifingar. Einnig má sjá að dæmi III er áhættumest þar sem meiri vigt dreifist yfir ávöxtunarbilið. Dreifingar fyrir dæmi I og IV eru svipaðar sem og dreifingar fyrir dæmi II og III.

Miðað við forsendur greiningarinnar þá eru metnar um 76% líkur á að vænt langtímaávöxtun verði 3,5% eða hærri í dæmum I og IV. Í dæmi II eru metnar um 86% líkur á að vænt langtímaávöxtun verði 3,5% eða hærri en í dæmi IV eru metnar líkur 88%. Þessar niðurstöður eru fengnar með því að leggja saman gildi súlanna upp að 3,5% væntri langtímaávöxtun. Í töflu 3 má sjá yfirlit yfir mat á líkindum á því að vænt langtímaávöxtun verði á tilteknum bilum.

Tafla 3. Metnar líkur á að vænt langtímaávöxtun verði á tilteknum bilum

Dæmi	I	II	III	IV
Yfir 3,5%	76%	86%	88%	76%
Á bilinu 3,5-5,0%	63%	54%	52%	61%
Yfir 5%	13%	32%	37%	15%

Þau dæmi sem hér eru kynnt eru einungis birtingarmyndir margra möguleika. Það hvaða eignasafn myndi helst henta til skipta gagnvart fjárfestum (kröfuhöfum) er háð bæði áherslum ríkissjóðs og viðhorfi fjárfesta til ávöxtunar og áhættu. Vera kann að besta niðurstaða sé einhver önnur en kynnt er í þessum fjórum dæmum.

Miðað við umrædd dæmi þá myndi afhending eignasafns samkvæmt dæmi III skila mestri skuldalækkun ríkissjóðs. Sama dæmi felur einnig í sér hæsta vænta langtímaávöxtun auk þess sem mestar líkur eru á að ávöxtun verði yfir 3,5%. Fyrir fjárfesta munar hins vegar ekki miklu í væntri langtímaávöxtun í samanburði við dæmi II.

Aðalmunur dæma II og III felst í því að í dæmi III er gert ráð fyrir afhendingu skuldabréfa í eigu ÍL-sjóðs, þ.e. skuldabréfa sem útgefin eru af Húsnæðissjóði, Briet o.fl. í stað nýrra ríkisskuldabréfa. Þá er gert ráð fyrir að umrædd bréf verði afhent m.v. 2,5% ávöxtunarkröfu eða á um 0,54% hærri kröfu en ríkisbréf. Hins vegar þarfnast skilmálar a.m.k. skuldabréfa HS skýringar, m.a. m.t.t. ríkisábyrgðar. Þau bréf eru heldur ekki skráð í kauphöll eins og ríkisbréf. Áhætta skuldabréfa HS, Brietar o.fl. er í útreikningum metin sú sama og ríkisbréfa. Ekki er víst að það sé ásættanleg nálgun. Sá munur sem birtist í áhættu dæma II og III er vegna mismunandi sjóðstreymis ríkisbréfa og þessara tilteknu skuldabréfa.

Athyglisvert er að þrátt fyrir að reiknað staðalfrávik væntrar langtímaávöxtunar sé hærra í dæmum II og III en í dæmum I og IV þá eru meiri líkur á að vænt langtímaávöxtun verði yfir 3,5% í dæmum II og III. Ástæða þessa er sú að staðalfrávik tekur ekki tillit til þess hvort ávöxtunarbreyting er jákvæð eða neikvæð. Sá munur endurspeglar hins vegar í hermireikningunum í formi minni metinna líkinda á að vænt langtímaávöxtun verði minni en 3,5%. Þar sem vænt langtímaávöxtun er einnig hærri í dæmum II og III þá ættu þau eignasöfn einnig að hafa yfirburði. Það eru mögulega önnur sjónarmið sem gæti hneigt fjárfesta til að kjósa eignasöfn í dæmum I og IV, s.s. áhersla á verðbréf með föstum tekjum, áhersla á ríkistryggð skuldabréf o.þ.h.

Nánar um líkanið, forsendur og gögn

Eins og áður segir þá byggir sú greining sem hér er kynnt á útvíkkun CAPM-líkansins. Fræðilega hugtakið „áhættulaus ávöxtun“ vísar til CAPM-líkansins og er sú ávöxtun sem fá má með öruggum hætti m.v. gefinn fjárfestingartíma. CAPM-líkanið inniheldur eingöngu eitt tímabil og því þarf að skilgreina áhættulausa ávöxtun í því samhengi sem viðeigandi er fyrir úrlausnarefnið. Í núverandi samhengi er litið til líftíma skuldabréfa sem útgefin hafa verið af ÍL-sjóði en hann er að meðaltali um 8 ár. Í tölfræðigreiningunni er stuðst við upplýsingar um ávöxtunarkröfu verðtryggðra ríkistryggðra skuldabréfa með 10 ára föstum líftíma sem aflað var hjá Kauphöllinni (Nasdaq Iceland). Kauphöllin reiknar daglega ávöxtunarkröfu verðtryggðra skuldabréfa m.v. fastan 5 ára og 10 ára líftíma. Hugmyndin að baki áhættulausri ávöxtun er sú að um sé að ræða ávöxtun sem fjárfestar geta fengið með því að kaupa eign sem haldið er út líftímamann án þess að eiga á hættu óvænta verðbreytingu eða greiðslufall.

CAPM-líkanið gerir engar kröfur um viðhorf fjárfesta til áhættu en unnt er að vinna með ýmsar forsendur í þeim efnum. Hvað ríkissjóð varðar þá miða fræðin gjarnan við hlutlaust viðhorf til áhættu, þ.e. að ríkissjóður sé hvorki áhættusækinn né áhættufælinn en þegar um einstaklinga er að ræða þá miða fræðin við að eðlileg hegðan þeirra sé í takt við áhættufælni. Ætla má að stórir óskuldsettir fjárfestar hafi tiltölulega hlutlaust viðhorf til áhættu. Í greiningunni er miðað við hlutlaust viðhorf til áhættu þar sem forsendan leyfir einfaldari nálgun.

Til að unnt sé að álykta hlutlægt á tölfræðilegum grunni þarf söguleg gögn um mælingar á þróun þeirra stærða sem verið er að greina. Þau gögn sem þarf til að beita útvíkkðu CAPM-líkani eru þróun áhættulausrar ávöxtunar, þróun markaðsáhættuálags, gengisbreytingar gjaldmiðla og verðbólga. Tímaraðargögnin eru á mánaðarlegum grunni og reiknilíkanið hannað m.v. þá gagnatíðni. Niðurstöðum hermireikninga af mánaðarlegri tíðni er svo breytt yfir á árlegan grunn til frekari túlkunar. Ástæða þess að notuð eru gögn af mánaðarlegri tíðni við tölfræðigreininguna er sú að þörf er á tilteknu gagnamagni til að unnt sé að framkvæma hagamælingar og hermireikninga með marktækum hætti. Mánaðarleg gögn fyrir 23 ára tímabil innihalda þannig 12

sinnnum fleiri mælingar en árleg eða 276 tímaraðarpunkta fyrir hverja breytu í stað 23. Meira gagnamagn leyfir einnig að beitt sé bootstrap aðferð við hermireikninga.

Vegna skamrar sögu formlegs hlutabréfamarkaðar hérlendis og fjármálahrunsins árið 2008 þá er sérstökum erfiðleikum bundið að mæla svokallað markaðsáhættuálag fyrir íslenskan markað. Sú aðferð sem gjarnan er beitt við verðmöt hérlendis er að miða við erlendar niðurstöður um markaðsáhættuálag auk sérstaks álags sem algengt hefur verið að sé á bilinu 1-2%. Sú aðferð sem hér er notuð er að miðað er við niðurstöður á grunni bandarískra mælinga og bætt við viðbótar ca. 1% álagi auk þess sem áhætta íslenska hlutabréfamarkaðarins er aukin í takt við þetta sérstaka álag.

Próf. Aswath Damodaran við Stern School of Business í NY hefur um langt árabil metið markaðs-áhættuálag og birt á heimasvæði sínu.⁴ Damodaran metur markaðsáhættuálag með fleiri en einni aðferð en ein þeirra er sérstök þar sem hún felur í sér framsýnt mat (e. Implied Equity Premium) en annars er algengast að miðað sé við hrein söguleg gögn þar sem litið er til lengri tíma sögulegra meðaltalna. Í þeirri greiningu sem hér er kynnt er stuðst við gögn af mánaðarlegri tíðni fyrir framsýnt mat á grunni bandarísku S&P 500 hlutabréfavisitölunnar.⁵

Hvað varðar áhættulausa ávöxtun í íslenskum krónum þá er miðað við ávöxtunarkröfu verðtryggðra ríkistryggðra skuldabréfa miðað við 10 ára fastan líftíma samkvæmt útreikningum Kauphallarinnar. Það að umrædd skuldabréf teljist áhættalaus felur m.a. í sér að í greiningunni er dulin forsenda um 10 ára eignarhaldstíma.⁶

Ávöxtunarkrafa íslenskra hlutabréfa er ákvörðuð í á grunni CAPM líkansins og eftirfarandi forsendna. Miðað er við ávöxtunarkröfu verðtryggðra 10 ára ríkistryggðra skuldabréfa auk framsýns mats Damodarans á markaðsáhættuálagi margfölduðu með stuðlinum 1,2. Þessi margfeldisstuðull leiðir til ca. 1% áhættuálags fyrir íslensk hlutabréf ofan á markaðsáhættuálag bandarískra hlutabréfa og felur í sér að kerfisbundin áhætta íslenskra hlutabréfa er metin 20% hærrí en bandarískra.

Hvað varðar áhættulausa ávöxtun sem lögð er til grundvallar mats á væntri ávöxtun erlendra hlutabréfa þá er um að ræða ávöxtunarkröfu óverðtryggðra bandarískra ríkisskuldabréfa með 10 ára fastan líftíma sem reiknuð er af Seðlabanka Bandaríkjanna. Vegna daglegra gengisbreytinga dollars þá er þessi ávöxtun ekki áhættalaus í íslenskum krónum. Þessi ávöxtun er umreiknuð í verðtryggðar íslenskar krónur á grunni gengisbreytinga dollars umfram breytingar á vísitölu neysliverðs frá mánuði til mánaðar.

Ávöxtunarkrafa bandarískra hlutabréfa er metin á grunni áhættulausrar bandarískrar ávöxtunarkröfu umreiknaðrar yfir í verðtryggðar íslenskar krónur að viðbættu mati Damodarans á framsýnu markaðsáhættuálagi.

⁴ Sjá <https://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>. Ýmsir aðrir hafa birt mat á markaðsáhættuálagi, t.d. Credit Suisse, sjá <https://www.credit-suisse.com/about-us-news/en/articles/news-and-expertise/global-investment-returns-yearbook-2023-202302.html>

⁵ Gögn á heimasvæði Damodarans ná aftur til ársins 2008 en Analytica hefur með sömu aðferð metið Implied Equity Premium á mánaðargrunni aftur til ársins 2000.

⁶ Fram til 31/1 2020 voru skuldabréf Íbúðalánasjóðs (nú ÍL-sjóðs) hluti af þeim skuldabréfum sem Nasdaq Iceland notaði til útreiknings 10 ára fast-líftíma verðtryggðrar ávöxtunarkröfu.

Tölfræðilíkanið fyrir ávöxtun er byggt á framangreindum gögnum af mánaðarlegri tíðni og er svokallað ARIMA-tímaraðarlíkan⁷ með þeirri viðbót að dreifni (varians) afgangslíða líkansins fylgir GARCH-ferli⁸. Í því felst að líkanið hermir bæði eftir sögulegum sveiflum ávöxtunar og sveiflum í breytileika ávöxtunar. Með afgangslíðum er átt við uppsprettu þess hluta breytileika sem yfirleitt er litið á sem tilviljanakenndan. Líkanið útskýrir ekki grunnorsakir tilviljanakennds breytileika heldur setur tilviljanakenndan breytileika í samhengi við kerfisbundinn breytileika. Helstu jöfnur líkansins eru birtar í viðauka.

Tölfræðilíkanið byggir á fjórum ARIMA-jöfnum auk viðbótarjafna fyrir dreifni afgangslíða og skilgreininga til að tengja saman breytur. Hvað varðar dreifingu afgangslíða þá styðjast tvær jöfnur við svokallaða GED-dreifingu eða Generalized Error Distribution.⁹ Ein jafna er metin m.v. forsendu um t-dreifingu en ein á grunni forsendu um venjulega Normaldreifingu. Tölfræðimat á grunni GED-dreifingar og/eða t-dreifingar getur verið skilvirkara þegar um fjármálatímaraðir er að ræða þar sem unnt er að taka tillit til þess að á fjármálamarkaði eru meiri líkur á öfgaatburðum en samkvæmt venjulegri Normaldreifingu.

Hermanir fela í sér að líkt er eftir sögulegum breytileika þeirra stærða sem líkanið nær til með því að velja tilviljanakenndar stærðir þess af handahófi yfir tímabil framreikningsins sem nær til ársins 2044. Tilviljanakenndar stærðir líkansins eru í þessu samhengi afgangslíðir einstakra jafna þess. Gerðar eru „bootstrap hermanir“ sem byggja á raunverulegri sögulegri dreifingu afgangslíða en ekki fræðilegum líkindadreifingum sem óvíst er að eigi við. Þessi aðferð tryggir einnig að sögulegt samhengi afgangslíða úr einstökum jöfnum heldur sér í hermireikningunum og að meiri líkur eru á öfgaatburðum en samkvæmt Normaldreifingu. Þá eru afgangslíðir tveggja samliggjandi mánaða dregnir samtímis af handahófi í því skyni að hermireikningar endurspegli betur sjálffylgni (e. autocorrelation) í dreifni afgangslíða.¹⁰

Niðurstöður hermireikninga á mánaðarlegum grunni eru dregnar saman á ársgrunn til frekari úrvinnslu.

⁷ ARIMA stendur fyrir Autoregressive Integrated Moving Average en um er að ræða algenga aðferðafræði sem varð til á áttunda áratug síðustu aldar og er gjarnan kennd við Box og Jenkins. Aðferðin byggir spár á sögulegum tímaraðargögnum þar sem leitast er við að bera kennsl á kerfisbundin mynstur í gögnum.

⁸ GARCH stendur fyrir Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity og byggir á því að varians afgangslíðar í tímaraðarlíkani sé breytilegur og ráðist af sk. sjálffylgni. Aðferðafræðin kom fram snemma á níunda áratug síðustu aldar og er mikið notuð í fjármálatölfræði. Aðferðafræðin er kennd við Robert Engle sem hlaut Nóbelsverðlaun fyrir árið 2003 ásamt Clive Granger.

⁹ GED dreifing gengur einnig undir nöfnunum Generalized Normal Distribution eða Exponential Power Distribution. Sjá nánar um GED t.d. hér <https://www.statisticshowto.com/generalized-error-distribution-generalized-normal/> eða á <https://wikipedia.org>.

¹⁰ Niðurstöðum 12 sviðsmynda af 1000 var kastað brott sem delli og 12 nýjar sviðsmyndir dregnar í þeirra stað.

Viðauki – Jöfnur tölfræðilíkans

Líkanið skiptist í skilgreiningar og tölfræðijöfnur. Ávöxtunarkrafa er skilgreind í logaritnum en vegna þess að ávöxtunarkrafa ríkisbréfa varð lítillega neikvæð um skamma hríð í COVID19 faraldrinum þá er bætt við ávöxtunarkröfuna litlu álagi sem kallað er R_{min} hér að neðan. Þegar líkanið er leyst fyrir ávöxtunarkröfu er þetta leiðrétt til baka.

Hér að neðan þá tákna forskæptið l logaritmaumbreytingu en forskæptið d tákna fyrsta mismun í logaritnum.

Tölfræðiniðurstöður er að finna fyrir aftan lýsingu á jöfnum.

Ávöxtunarkrafa íslenskra ríkisbréfa

R_t : Verðtryggð ávöxtunarkrafa 10 ára ríkistryggðra skuldabréfa m.v. fastan líftíma

R_{min} : Leiðréttingarliður sem endurspeglar lægsta leyfða gildi ávöxtunarkröfu ákvarðaður 0,25%.

DUM2022 $_i$: Gervibreyta sem tekur gildið 1 frá feb. 2020 til okt 2022 annars núll.

Breyturnar DUM $_i$ eru gervibreytur sem taka almennt gildið 0 en annars gildið 1 fyrir $i=1-4$

$i=1$: í feb. 2020, $i=2$: í ágúst 2020, $i=3$: í sept. 2020, $i=4$: í okt. 2020.

Stuðlarnir við gervibreyturnar, γ_i eru: $i=1$: -0.219, $i=2$: -1.352, $i=3$: 0.671, $i=4$: 0.880

Tölfræðilíkanið er ARIMA 0,1,3 með ARCH4 afgangslíð þar sem w_t eru afgangslíðir og h_t breytni

Líkanið er metið m.v. GED dreifingu með sk. shape stuðul 1.3731.

$$(1) \quad lR_t = \log(R_t + R_{min})$$

$$(2) \quad dR_t = lR_t - lR_{t-1}$$

$$(3) \quad dR_t = \sum_{i=1}^4 \gamma_i DUM_{i,t}^R + w_t + 0.296 w_{t-1} + 0.182 w_{t-3}$$

$$(4) \quad h_t^w = 0.00072 + 0.0123 DUM2022_t + 0.240 w_{t-1}^2 - 0.002 w_{t-2}^2 + 0.358 w_{t-3}^2 + 0.199 w_{t-4}^2$$

$$w_t \sim GED(1.3731)$$

Ávöxtunarkrafa bandarískra óverðtryggðra ríkisskuldabréfa

US10Y $_t$: Óverðtryggð ávöxtunarkrafa 10 ára bandarískra ríkisskuldabréfa m.v. fastan líftíma

Breyturnar DUM $_i$ eru gervibreytur sem taka almennt gildið 0 en annars gildið 1 fyrir $i=1-9$

$i=1$: í des. 2008, $i=2$: í feb. 2009, $i=3$: í ágúst 2011, $i=4$: í ágúst 2019, $i=5$ í feb. 2020,

$i=6$: í mars 2020, $i=7$ í apr. 2020, $i=8$: í júlí 2020, $i=9$: á tímabilinu ágúst 2019-sept. 2022.

Stuðlarnir við gervibreyturnar, α_i eru: $i=1$: -0.361, $i=2$: 0.134, $i=3$: -0.201, $i=4$: -0.295, $i=5$: -0.185, $i=6$: -0.604, $i=7$: -0.317, $i=8$: -0.214, $i=9$: 0.054

Tölfræðilíkanið er ARIMA 0,1,1 með GARCH 1,1 afgangslíð þar sem v_t eru normaldreifðir afgangslíðir og h_t breytni.

$$(5) \quad dUS10Y_t = \log(US10Y_t / US10Y_{t-1})$$

ANALYTICA

$$(6) \quad dUS10Y_t = \sum_{i=1}^9 \alpha_i DUM_{i,t}^Y + v_t + 0.286 v_{t-1}$$

$$(7) \quad h_t^v = 0.00021 + 0.1026 v_{t-1}^2 + 0.8489 h_{t-1}^v$$

$$v_t \sim N$$

Markaðsáhættuálag bandarískra hlutabréfa

ERP_t: Markaðsáhættuálag bandarískra hlutabréfa skv. Damodaran

Tölfræðilíkanið er ARIMA 3,0,0 með jafndreifðum afgangslíð þar sem z_t eru afgangslíðir. Líkanið er metið á grunni t dreifingar afgangslíða með shape stuðul 3.11.

$$(8) \quad lERP_t = -0.0907 + 0.8714 lERP_{t-1} + 0.0988 lERP_{t-3} + z_t$$

$$(9) \quad h_t^E = 0.00520$$

$$z_t \sim t(3.11)$$

Gengisbreyting dollars gagnvart krónu umfram vísitölu neysluverðs

dUSD_t: Logaritmbreyting á gengi dollars gagnvart krónu frá fyrri mánuði

dP_t: Logaritmbreyting á vísitölu neysluverðs frá fyrri mánuði

Tölfræðilíkanið er ARIMA 8,1,0 með ARCH 6 afgangslíð þar sem u_t eru afgangslíðir. Líkanið er metið á grunni GED dreifingar afgangslíða með shape stuðul 1.2323.

$$(10) \quad dUSD_t - dP_t = 0.087 (dUSD_{t-8} - dP_{t-8}) + u_t$$

$$(11) \quad h_t^u = 0.00073 + 0.1816u_{t-1}^2 + 0.2459u_{t-2}^2 - 0.0280u_{t-3}^2 - 0.0699u_{t-4}^2 \\ - 0.0306u_{t-5}^2 + 0.1291u_{t-6}^2$$

$$u_t \sim GED(1.2323)$$

Ávöxtun bandarískra ríkisskuldabréfa í krónum á föstu verði

dUSY_t: Mánaðarleg logaritma-ávöxtun í krónum á föstu verði

$$(12) \quad dUSY_t = dUSD_t - dP_t + \log(1 + US10Y_t)/12$$

$$(13) \quad mdUSY_t = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{11} dUSY_{t-i}$$

$$(14) \quad mUS1Y_t = \exp(12 mdUSY_t) - 1$$

CAPM líkanið

$E(R_{i,t})$: Vænt langtímaávöxtun eignar i á tíma t

β : Beta líkansins

$R_{f,t}$: Áhættulausir vextir á tíma t . Fyrstu 10 ár hermireikninga eru áhættulausir vextir fastir

$$(15) \quad E(R_{i,t}) = R_{f,t} + \beta ERP_t$$

Ýmsar skilgreiningar

$$(16) \quad R_t = \exp(lR_t) - R_{min}$$

$$(17) \quad lUS10Y_t = dUS10Y_t + lUS10Y_{t-1}$$

$$(18) \quad US10Y_t = \exp(lUS10Y_t)$$

$$(19) \quad ERP_t = \exp(lERP_t)$$

Markaðsáhættuálag á Íslandi

$$(20) \quad REQ_t^{IS} = R_t + 1.2 ERP_t$$

Leiðrétting á hneigð hermireikninga markaðsáhættuálags bandarískra hlutabréfa í ISK

REQ_t : Markaðsáhættuálag bandarískra hlutabréfa metið í krónum

bias: Útreiknuð stærð sem leiðréttir væntigildi út frá mismun á niðurstöðu hermireikninga og framreikningi án óvissu. bias=0.69%

$$(21) \quad REQ_t^{US} = mUS1Y_t - bias + ERP_t$$

ANALYTICA

Tölfræðiniðurstöður

Ávöxtunarkrafa ríkisbréfa

GARCH Model - Estimation by BFGS
Convergence in 44 Iterations. Final criterion was 0.0000061 <= 0.0000100

Dependent Variable DR
Monthly Data From 2000:01 To 2022:12
Usable Observations 276
Log Likelihood 428.7850

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. X2002	-0.218730956	0.134104347	-1.63105	0.10287967
2. X2008	-1.351826366	0.129988785	-10.39956	0.00000000
3. X2009	0.670777059	0.098464015	6.81241	0.00000000
4. X2010	0.880239088	0.068343212	12.87969	0.00000000
5. Mvg Avge{1}	0.296353499	0.057947633	5.11416	0.00000032
6. Mvg Avge{3}	0.181536755	0.051026632	3.55769	0.00037414
7. C	0.000718791	0.000245280	2.93049	0.00338425
8. A{1}	0.239857167	0.101167305	2.37090	0.01774502
9. A{2}	-0.001926326	0.045959769	-0.04191	0.96656781
10. A{3}	0.357783050	0.143792933	2.48818	0.01283978
11. A{4}	0.198535650	0.103634551	1.91573	0.05539968
12. X2002_2210	0.012314763	0.006730342	1.82974	0.06728910
13. Shape(GED)	1.373134663	0.169374277	8.10710	0.00000000

Ávöxtunarkrafa bandarískra ríkisskuldabréfa

GARCH Model - Estimation by BFGS
Convergence in 23 Iterations. Final criterion was 0.0000019 <= 0.0000100

Dependent Variable DRF
Monthly Data From 2000:01 To 2022:12
Usable Observations 276
Log Likelihood 380.1627

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. Z0812	-0.361123306	0.056802424	-6.35753	0.00000000
2. Z0902	0.134267420	0.058671495	2.28846	0.02211070
3. Z1108	-0.201139493	0.059679860	-3.37031	0.00075084
4. Z1908	-0.294686002	0.054031005	-5.45402	0.00000005
5. Z2002	-0.184931508	0.055523130	-3.33071	0.00086624
6. Z2003	-0.604349473	0.057170657	-10.57097	0.00000000
7. Z2004	-0.317094161	0.053360003	-5.94254	0.00000000
8. Z2007	-0.213905323	0.056682957	-3.77371	0.00016083
9. Z198229	0.053971127	0.015032230	3.59036	0.00033022
10. Mvg Avge{1}	0.286017164	0.062469114	4.57854	0.00000468
11. C	0.000214011	0.000164529	1.30075	0.19334337
12. A	0.102560353	0.042514352	2.41237	0.01584918
13. B	0.848893032	0.067847656	12.51175	0.00000000

ANALYTICA

Markaðsáhættuálag bandarískra hlutabréfa

GARCH Model - Estimation by BFGS
Convergence in 28 Iterations. Final criterion was 0.0000000 <= 0.0000100

Dependent Variable LERP
Monthly Data From 2000:04 To 2022:12
Usable Observations 273
Log Likelihood 377.8425

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. Constant	-0.090712409	0.001159610	-78.22664	0.00000000
2. LERP{1}	0.871440726	0.001215591	716.88638	0.00000000
3. LERP{3}	0.098827451	0.000355583	277.93077	0.00000000
4. C	0.005196982	0.001080055	4.81178	0.00000150
5. Shape(t degrees)	3.112942435	0.467026116	6.66546	0.00000000

Mánaðarleg gengisbreyting dollar gagnvart krónu umfram breytingu vísitölu neysluverðs

GARCH Model - Estimation by BFGS
Convergence in 11 Iterations. Final criterion was 0.0000050 <= 0.0000100

Dependent Variable DUSDP
Monthly Data From 2000:01 To 2022:12
Usable Observations 276
Log Likelihood 544.1889

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1. DUSDP{8}	0.087276002	0.047110885	1.85257	0.06394465
2. C	0.000727143	0.000118684	6.12672	0.00000000
3. A{1}	0.181675306	0.091915746	1.97654	0.04809346
4. A{2}	0.245941310	0.102095717	2.40893	0.01599942
5. A{3}	-0.028014396	0.038315705	-0.73115	0.46468964
6. A{4}	-0.069879345	0.015712052	-4.44750	0.00000869
7. A{5}	-0.030552199	0.025626217	-1.19222	0.23317330
8. A{6}	0.129058445	0.047828307	2.69837	0.00696800
9. Shape(GED)	1.232348560	0.135267927	9.11043	0.00000000